Aufgabenkatalog Analysis – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Absolutbetrag** mit Lösungen
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (1) *Betragsgleichungen*
Geben Sie alle reellen Lösungen folgender Betragsgleichungen an:

a) $|2x+5| = 7$,

b) $x + |x-1| = 3$,

c) $|3x-5| + 2x = 10$,

d) $2x - |3-x| = 18$,

e) $2x + |2x+4| = -4$,

f) $|3x+6| - 2x = -5$,

g) $\dfrac{|x-4|}{x+2} = \dfrac{x-1}{x+7}$,

h) $\dfrac{x-1}{x-4} = \dfrac{|x-5|}{x-8}$,

i) $|x+1| + 5 = |2x-4|$,

j) $|x-3| - |x-5| = 2$,

k) $|x-1| + |x+5| = 6$,

l) $||x-1| - 4| = 4$.

Lösung.

a) $|2x+5| = 7$ hat die Lösungsmenge $L = \{-6, 1\}$, denn für $x \in \mathbb{R}$ beliebig gilt

$$\begin{aligned}
&|2x+5| = 7\\
\Leftrightarrow\ &(2x+5 \geq 0 \quad \wedge \quad 2x+5 = 7) \qquad \vee \qquad (2x+5 \leq 0 \quad \wedge \quad -(2x+5) = 7)\\
\Leftrightarrow\ &(x \geq -\tfrac{5}{2} \quad \wedge \quad x = 1) \quad \vee \quad (x \leq -\tfrac{2}{5} \quad \wedge \quad x = -6)\\
\Leftrightarrow\ &(x = 1) \quad \vee \quad (x = -6)\\
\Leftrightarrow\ &x \in \{-6, 1\}
\end{aligned}$$

b) $L = \{2\}$,

c) $L = \{-5, 3\}$,

d) $L = \{-15\}$,

e) $L = \{-2\}$,

f) $L = \emptyset$,

g) $L = \{-5, 3, 13\}$, denn für $x \in \mathbb{R}$ beliebig gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{|x-4|}{x+2} = \frac{x-1}{x+7}\\
\Leftrightarrow\ &\left(x-4 \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{x-4}{x+2} = \frac{x-1}{x+7}\right) \qquad \vee \qquad \left(x-4 \leq 0 \quad \wedge \quad \frac{4-x}{x+2} = \frac{x-1}{x+7}\right)\\
\Leftrightarrow\ &(x \geq 4 \quad \wedge \quad x = 13) \qquad \vee \qquad (x \leq 4 \quad \wedge \quad (x = 3 \vee x = -5))\\
\Leftrightarrow\ &x \in \{-5, 3, 13\}.
\end{aligned}$$

h) $L = \{2\}$,

i) $L = \left\{-\frac{2}{3}, 10\right\}$, denn für $x \in \mathbb{R}$ beliebig gilt[1]:

Fall 1: Sei $x+1 \geq 0$ (bzw. $x \geq -1$). Dann gilt:

$$x + 1 + 5 = |2x-4|$$

Fall 1.1: Sei $x \geq -1$ und $2x - 4 \geq 0$ (bzw. $x \geq 2$)
bzw. da beides gelten soll kurz:
Fall 1.1: Sei $x \geq 2$. Dann gilt:

$$x + 1 + 5 = 2x - 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 10$$

[1] Damit die Lösung übersichtlicher ist, machen wir hier eine explizite Fallunterscheidung.

Fall 1.2: Sei $x \geq -1$ und $2x - 4 \leq 0$ (bzw. $x \leq 2$):
bzw. da beides gelten soll kurz:
Fall 1.2: Sei $-1 \leq x \leq 2$. Dann gilt:

$$x + 1 + 5 = -2x + 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -\frac{2}{3}$$

Fall 2: Sei $x + 1 \leq 0$ (bzw. $x \leq -1$). Dann gilt:

$$-x - 1 + 5 = |2x - 4|$$

Fall 2.1: Sei $x \leq -1$ und $2x - 4 \geq 0$ (bzw. $x \geq 2$):
Da beide Bedingungen zusammen unerfüllbar sind, sind wir schon fertig.
Fall 2.2: Sei $x \leq -1$ und $2x - 4 \leq 0$ (bzw. $x \leq 2$)
bzw. da beides gelten soll kurz:
Fall 2.2: Sei $x \leq -1$. Dann gilt:

$$-x - 1 + 5 = -2x + 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0 \ ↯$$

j) $L = [5, \infty)$,

k) $L = [-5, 1]$,

l) $L = \{-7, 1, 9\}$, denn für $x \in \mathbb{R}$ beliebig gilt:
1. Fall: Sei $x - 1 \geq 0$ (bzw. $x \geq 1$), dann gilt:

$$|x - 1 - 4| = |x - 5| = 4$$

Fall 1.1: Sei $x \geq 1$ und $x - 5 \geq 0$ bzw. ($x \geq 5$)
bzw. da beides gelten soll kurz:
Fall 1.1: Sei $x \geq 5$. Dann gilt:

$$x - 5 = 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 9$$

Fall 1.2: Sei $x \geq 1$ und $x - 5 \leq 0$ bzw. ($x \leq 5$)
bzw. da beides gelten soll kurz:
Fall 1.2: Sei $1 \leq x \leq 5$. Dann gilt:

$$-x + 5 = 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 1$$

2. Fall: Sei $x - 1 \leq 0$ (bzw. $x \leq 1$), dann gilt:

$$|-x + 1 - 4| = |-3 - x| = |x + 3| = 4$$

Fall 2.1: Sei $x \leq 1$ und $x + 3 \geq 0$ bzw. ($x \geq -3$)
bzw. da beides gelten soll kurz:
Fall 2.1: Sei $-3 \leq x \leq 1$. Dann gilt:

$$x + 3 = 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 1$$

Fall 2.2: Sei $x \leq 1$ und $x + 3 \leq 0$ bzw. ($x \leq -3$)
bzw. da beides gelten soll kurz:
Fall 2.2: Sei $x \leq -3$. Dann gilt:

$$-x - 3 = 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -7$$

□

Aufgabe 2 (2) *Betragsungleichungen I*
Bestimmen Sie alle reellen Lösungen folgender Betragsungleichungen:

a) $2 + |x+3| < 3$,
b) $x - |2x-12| \geq 0$,
c) $5 - 3 \cdot |x-6| \leq 3x - 7$,
d) $2 \cdot |x-1| > 8$
e) $|x+1| - |2x-6| \leq 10$,
f) $||x-5| - 3| \leq 4$,
g) $x - |2x+4| > 1 - |x-2|$.

Lösung.

a) $L = (-4, -2)$, denn für $x \in \mathbb{R}$ beliebig gilt:

$$
\begin{aligned}
& 2 + |x+3| < 3 \\
\Leftrightarrow\ & (x+3 \geq 0 \quad \wedge \quad 2 + x + 3 < 3) \qquad \vee \qquad (x+3 \leq 0 \quad \wedge \quad 2 - x - 3 < 3) \\
\Leftrightarrow\ & (x \geq -3 \quad \wedge \quad x < -2) \qquad \vee \qquad (x \leq -3 \quad \wedge \quad -4 < x) \\
\Leftrightarrow\ & (-3 \leq x < -2) \qquad \vee \qquad (-4 < x \leq -3) \\
\Leftrightarrow\ & x \in [-3, -2) \qquad \vee \qquad x \in (-4, -3] \\
\Leftrightarrow\ & x \in (-4, -3] \cup [-3, -2) \\
\Leftrightarrow\ & x \in (-4, -2)
\end{aligned}
$$

b) $L = [4, 12]$,

c) $L = \mathbb{R}$,

d) $L = \mathbb{R} \setminus [-3, 5]$

e) $L = \mathbb{R}$,

f) $L = [-2, 12]$,

g) $L = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

□

Aufgabe 3 (4) *Betragsungleichungen II*
Es sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper.
Beweisen Sie, dass für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ gilt:

$$|x| + |y| + |z| - |x+y| - |y+z| - |z+x| + |x+y+z| \geq 0$$

Aufgabe 4 (2) *Eigenschaften Betrag*
Zeigen Sie, dass für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ der Absolutbetrag folgende Eigenschaften hat:

a) $|x| \geq 0$, wobei $|x| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$,
b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,
c) $|-x| = |x|$,
d) $||x|| = |x|$,
e) $x \leq |x|$,
f) $|x+y| \leq |x| + |y|$,
g) $x^2 = a \ \Leftrightarrow \ |x| = \sqrt{a}$
wobei $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ fest.

Aufgabe 5 (3) *Inverse Dreiecksungleichung*
Beweisen Sie für beliebige reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ folgende Ungleichungen:

a) $|x| - |y| \leq |x + y|$, b) $\big||x| - |y|\big| \leq |x| + |y|$, c) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$,

Aufgabe 6 (2) Skizzieren Sie Graphen folgender Funktionen.

a) $y = |x - 1|$,

b) $y = |x + 2|$,

c) $y = |x + 1| + |x - 1|$,

d) $y = \frac{1}{2}(|x + 1| - |x - 1|)$,

e) $y = \operatorname{sign} x - \frac{1}{2}(|x + 1| - |x - 1|)$,

f) $y = \operatorname{sign} x^2$,

g) $y = \operatorname{sign}(x^2 - 1)$,

h) $y = \operatorname{sign}(\frac{2-x}{2+x})$,

i) $y = \operatorname{sign}(x^3 - 4x)$,

j) $y = |x^2 - x - 2|$.